

## Risoluzione dei compiti del secondo esonero di Matematica Finanziaria (dicembre 2006).

1) Un intermediario finanziario possiede 10.000 azioni della società  $A$  e 7.500 della società  $B$  il cui valore unitario è rispettivamente 7,5 e 12 Euro.

Per coprirsi a due anni dal rischio di mercato compra un pari numero di put sulle due tipologie di azioni; le put in oggetto hanno strike price pari al 90% del valore corrente delle azioni. Le altre ipotesi del calcolo sono le seguenti: tasso risk free pari al 4%; rialzo e ribasso dell'azione  $A$  in un periodo pari a  $\pm 15\%$ ; rialzo e ribasso dell'azione  $B$  in un periodo pari a  $\pm 10\%$ .

Calcolare:

- I. il costo della copertura (prezzo di acquisto di tutte le put);
- II. il valore a scadenza del portafoglio assicurato (azioni + put) in tutti i casi possibili al netto del costo delle put.

### Risoluzione.

Determiniamo innanzi tutto il valore delle opzioni put per le due tipologie di azioni.

Per quanto riguarda la società  $A$ , i dati sono i seguenti:

$$A_0 = 7,5; \quad K_A = 7,5 \cdot 0,90 = 6,75; \quad i = 4\%; \quad u = 1,15; \quad d = 0,85$$

I possibili valori a scadenza dell'azione della società  $A$  saranno (nell'ambito del modello binomiale biperiodale):

$$A_T = \begin{cases} A_{uu} = A_0 \cdot u^2 = 9,91875 \\ A_{ud} = A_0 \cdot u \cdot d = 7,33125 \\ A_{dd} = A_0 \cdot d^2 = 5,41875 \end{cases}$$

di conseguenza, i possibili pay-off varranno:

$$\begin{cases} P_{uu}^A = \text{Max}(K_A - A_{uu}; 0) = 0 \\ P_{ud}^A = \text{Max}(K_A - A_{ud}; 0) = 0 \\ P_{dd}^A = \text{Max}(K_A - A_{dd}; 0) = 1,3313 \end{cases}$$

La probabilità risk neutral vale

$$\pi = \frac{1+i-d}{u-d} = \frac{1,04-0,85}{0,30} = 0,6333$$

Il valore della put con sottostante  $A$  vale perciò:

$$P^A = \frac{\pi^2 \cdot P_{uu}^A + 2\pi \cdot (1-\pi) \cdot P_{ud}^A + (1-\pi)^2 \cdot P_{dd}^A}{(1+i)^2} = 0,1655$$

Per quanto riguarda la società  $B$ , i dati sono i seguenti:

$$B_0 = 12; \quad K_B = 12 \cdot 0,90 = 10,8; \quad i = 4\%; \quad u = 1,10; \quad d = 0,90$$

I possibili valori a scadenza dell'azione della società  $B$  saranno:

$$B_T = \begin{cases} B_{uu} = B_0 \cdot u^2 = 14,52 \\ B_{ud} = B_0 \cdot u \cdot d = 11,88 \\ B_{dd} = B_0 \cdot d^2 = 9,72 \end{cases}$$

di conseguenza, i possibili pay-off varranno:

$$\begin{cases} P_{uu}^B = \text{Max}(K_B - B_{uu}; 0) = 0 \\ P_{ud}^B = \text{Max}(K_B - B_{ud}; 0) = 0 \\ P_{dd}^B = \text{Max}(K_B - B_{dd}; 0) = 0,0899 \end{cases}$$

La probabilità risk neutral vale

$$\pi = \frac{1+i-d}{u-d} = \frac{1,04-0,90}{0,20} = 0,70$$

Il valore della put con sottostante  $B$  vale perciò:

$$P^B = \frac{\pi^2 \cdot P_{uu}^B + 2\pi \cdot (1-\pi) \cdot P_{ud}^B + (1-\pi)^2 \cdot P_{dd}^B}{(1+i)^2} = 0,0899$$

Il costo della copertura tenendo conto delle quote  $\alpha = 10.000$  e  $\beta = 7.500$  vale:

$$C = \alpha \cdot P^A + \beta \cdot P^B = 2.328,76$$

Ricordiamo che un portafoglio costituito da un'azione e da un'opzione put con sottostante quell'azione possiede un valore a scadenza non inferiore allo strike price dell'opzione. L'opzione put viene chiamata "put protettiva" inoltre un portafoglio con queste caratteristiche realizza una "portfolio insurance".

Il valore (lordo) a scadenza del portafoglio assicurato sarà dato dalla somma del valore a scadenza delle azioni con il valore a scadenza delle opzioni (ossia il loro pay-off), perciò:

$$V_T^L = \alpha \cdot A_T + \alpha \cdot \text{Max}(K_A - A_T; 0) + \beta \cdot B_T + \beta \cdot \text{Max}(K_B - B_T; 0)$$

Il valore netto si ottiene infine sottraendo il costo della copertura:

$$V_T^N = V_T^L - C$$

Esaminiamo tutti i casi possibili:

$$V_T^L(uu) = 10.000 \cdot (9,91875 + 0) + 7.500 \cdot (14,52 + 0) = 208.087,5$$

$$\rightarrow V_T^N(uu) = 205.758,74$$

$$V_T^L(ud) = 10.000 \cdot (7,33125 + 0) + 7.500 \cdot (11,88 + 0) = 162.412,5$$

$$\rightarrow V_T^N(ud) = 160.083,74$$

$$V_T^L(dd) = 10.000 \cdot (5,41875 + 1,3313) + 7.500 \cdot (9,72 + 1,08) = 148.500$$

$$\rightarrow V_T^N(dd) = 146.171,24$$

2) Siano a disposizione i seguenti tre titoli obbligazionari:

$$z_1 = (-101,4; 106) / (0; 1)$$

$$z_2 = (-100,6; 5; 105) / (0; 1; 2)$$

$$z_3 = (-99,7; 5; 5; 105) / (0; 1; 2; 3)$$

e la curva dei tassi sia  $i(0; t) = 0,05 + 0,01(t - 1)$ .

Calcolare le quote di composizione ed il prezzo di un portafoglio che immunizza il seguente vettore di uscite:

$$L = (50.000; 50.000) / (1,25; 1,75)$$

imponendo che la duration di II ordine delle entrate sia maggiore del 10% di quella delle uscite.

### Risoluzione.

Ci poniamo nell'ipotesi di evoluzione dei tassi per "shift additivi".

Calcoliamo innanzi tutto i tassi a pronti ed i relativi fattori di attualizzazione per le epoche richieste utilizzando la curva dei tassi assegnata:

$$\begin{cases} i(0; 1) = 5\% \\ i(0; 1, 25) = 5,25\% \\ i(0; 1, 75) = 5,75\% \\ i(0; 2) = 6\% \\ i(0; 3) = 7\% \end{cases} \rightarrow \begin{cases} v(0; 1) = 0,9524 \\ v(0; 1, 25) = 0,9380 \\ v(0; 1, 75) = 0,9068 \\ v(0; 2) = 0,8900 \\ v(0; 3) = 0,8163 \end{cases}$$

Lo scadenziario del portafoglio delle entrate è

$$\alpha \cdot z_1 + \beta \cdot z_2 + \gamma \cdot z_3 \rightarrow (106 \cdot \alpha + 5 \cdot \beta + 5 \cdot \gamma; 105 \cdot \beta + 5 \cdot \gamma; 105 \cdot \gamma) / (1, 2, 3)$$

avendo indicato con  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  le quote di composizione incognite.

In virtù del teorema di Redington (abbiamo più di un'uscita), dobbiamo utilizzare i vincoli di bilancio, duration e dispersione.

- vincolo di bilancio (il valore, all'epoca zero, del portafoglio delle attività deve coincidere con il valore delle passività):

$$V(0, \theta) = V(0, u) \Leftrightarrow \sum_k \theta_k \cdot v(0; t_k) = \sum_k u_k \cdot v(0; t_k).$$

Calcoliamo i valori attuali del portafoglio delle attività e delle passività:

$$\begin{aligned} & \alpha \cdot 106 \cdot v(0; 1) + \beta \cdot (5 \cdot v(0; 1) + 105 \cdot v(0; 2)) + \gamma \cdot (5 \cdot v(0; 1) + 5 \cdot v(0; 2) + 105 \cdot v(0; 3)) = \\ & = 50.000 \cdot v(0; 1, 25) + 50.000 \cdot v(0; 1, 75) \\ & \Rightarrow \boxed{100,95 \cdot \alpha + 98,21 \cdot \beta + 94,92 \cdot \gamma = 92.241,88} \end{aligned}$$

- vincolo di duration (la duration delle attività coincide con la duration delle passività):

$$\begin{aligned} D^1(0, \theta) &= D^1(0, u) \Leftrightarrow \frac{\sum_k t_k \cdot \theta_k \cdot v(0; t_k)}{\sum_k \theta_k \cdot v(0; t_k)} = \frac{\sum_k t_k \cdot u_k \cdot v(0; t_k)}{\sum_k u_k \cdot v(0; t_k)} \\ D^1(0, \theta) &= \frac{(106 \cdot \alpha + 5 \cdot \beta + 5 \cdot \gamma) \cdot v(0; 1) + 2 \cdot (105 \cdot \beta + 5 \cdot \gamma) \cdot v(0; 2) + 3 \cdot 105 \cdot \gamma \cdot v(0; 3)}{92.241,88} = \\ &= \frac{\alpha \cdot 106 \cdot v(0; 1) + \beta \cdot (5 \cdot v(0; 1) + 210 \cdot v(0; 2)) + \gamma \cdot (5 \cdot v(0; 1) + 10 \cdot v(0; 2) + 315 \cdot v(0; 3))}{92.241,88} = \\ &= \frac{100,95 \cdot \alpha + 191,66 \cdot \beta + 270,80 \cdot \gamma}{92.241,88} \end{aligned}$$

mentre la duration delle uscite è:

$$D^1(0, u) = \frac{1,25 \cdot 50.000 \cdot v(0; 1, 25) + 1,75 \cdot 50.000 \cdot v(0; 1, 75)}{92.241,88} = 1,4958$$

Il secondo vincolo sarà perciò:

$$\boxed{100,95 \cdot \alpha + 191,66 \cdot \beta + 270,80 \cdot \gamma = 137.972,24}$$

- vincolo di dispersione (la dispersione delle attività è maggiore del 10% della dispersione delle passività):

$$D^{(2)}(0, \theta) = 1,1 \cdot D^{(2)}(0, u) \Rightarrow \frac{\sum_k t_k^2 \cdot \theta_k \cdot v(0; t_k)}{\sum_k \theta_k \cdot v(0; t_k)} = 1,1 \cdot \frac{\sum_k t_k^2 \cdot u_k \cdot v(0; t_k)}{\sum_k u_k \cdot v(0; t_k)}$$

La dispersione delle uscite è:

$$D^2(0, u) = \frac{1,25^2 \cdot 50.000 \cdot v(0; 1,25) + 1,75^2 \cdot 50.000 \cdot v(0; 1,75)}{92.241,88} = 2,2998$$

La dispersione delle entrate è:

$$\begin{aligned} D^2(0, \theta) &= \frac{(106 \cdot \alpha + 5 \cdot \beta + 5 \cdot \gamma) \cdot v(0; 1) + 4 \cdot (105 \cdot \beta + 5 \cdot \gamma) \cdot v(0; 2) + 9 \cdot 105 \cdot \gamma \cdot v(0; 3)}{92.241,88} = \\ &= \frac{\alpha \cdot 106 \cdot v(0; 1) + \beta \cdot (5 \cdot v(0; 1) + 420 \cdot v(0; 2)) + \gamma \cdot (5 \cdot v(0; 1) + 20 \cdot v(0; 2) + 945 \cdot v(0; 3))}{92.241,88} = \\ &= \frac{100,95 \cdot \alpha + 378,56 \cdot \beta + 793,96 \cdot \gamma}{92.241,88} \end{aligned}$$

Il vincolo di dispersione sarà:

$$100,95 \cdot \alpha + 378,56 \cdot \beta + 793,96 \cdot \gamma = 1,1 \cdot 2,2998 \cdot 92.241,88 = 233.351,36$$

Mettiamo infine a sistema le tre condizioni:

$$\begin{cases} 100,95 \cdot \alpha + 98,21 \cdot \beta + 94,92 \cdot \gamma = 92.241,88 \\ 100,95 \cdot \alpha + 191,66 \cdot \beta + 270,80 \cdot \gamma = 137.972,24 \\ 100,95 \cdot \alpha + 378,56 \cdot \beta + 793,96 \cdot \gamma = 233.351,36 \end{cases}$$

il quale risolto con il metodo di Cramer fornisce la soluzione:

$$\alpha = 458,00 \quad \beta = 446,34 \quad \gamma = 22,86.$$

3) Un'obbligazione triennale ha cedole semestrali calcolate al tasso  $J(2) = 0,06$ .

Calcolare:

- I. il valore della stessa in base alla curva dei tassi  $i(0; t) = 0,03 + 0,005(t-1)$ ;
- II. il rendimento della stessa se il prezzo è pari al 105% del valore teorico.

Risoluzione.

Il tasso semestrale è dato da  $i_{1/2} = \frac{J(2)}{2} = 0,03$  perciò lo scadenziario dell'obbligazione è:

$$\theta : (3; 3; 3; 3; 3; 103) / (0,5; 1; 1,5; 2; 2,5; 3)$$

In base alla curva dei tassi data, i tassi a pronti valgono:

$$i(0; 0,5) = 2,75\%$$

$$i(0; 1) = 3,00\%$$

$$i(0; 1,5) = 3,25\%$$

$$i(0; 2) = 3,50\%$$

$$i(0; 2,5) = 3,75\%$$

$$i(0; 3) = 4,00\%$$

mentre i fattori di attualizzazione, dati dalla relazione  $v(0; t) = (1 + i(0; t))^{-t}$ , valgono:

$$v(0; 0,5) = 0,9865$$

$$v(0; 1) = 0,9709$$

$$v(0; 1,5) = 0,9532$$

$$v(0; 2) = 0,9335$$

$$v(0; 2,5) = 0,9121$$

$$v(0; 3) = 0,8890$$

Il prezzo teorico dell'obbligazione sarà perciò:

$$P = 3 \cdot (v(0; 0,5) + v(0; 1) + v(0; 1,5) + v(0; 2) + v(0; 2,5)) + 103 \cdot v(0; 3) = 105,84$$

Il prezzo reale è dato da  $P^* = 1,05 \cdot P = 111,13$ .

In questa situazione, il rendimento (su base semestrale) si ottiene risolvendo l'equazione di equilibrio

$$P^* = 3 \cdot a_{\overline{6}|i_{1/2}} + 100 \cdot (1 + i_{1/2})^{-6}$$

Utilizzando il metodo dell'interpolazione si ottiene  $i_{1/2} \approx 1,075\% \rightarrow i \approx 2,162\%$ .

4) Un investitore possiede un portafoglio con scadenza 1 anno formato da:

- uno zero coupon bond  $z_1 = (-101,4; 106) / (0; 1)$
- 20 azioni che quotano oggi 5 Euro;
- 20 put con strike price 4,75 Euro.

Sapendo che  $u = 1,2$ ;  $d = 0,8$ ;  $i(0; 1) = 0,05$  calcolare:

- I. il valore in  $t = 0$  del portafoglio complessivo al netto del costo delle put;
- II. i possibili valori in  $t = 1$  del portafoglio;
- III. i rendimenti netti tra 0 ed 1 del portafoglio nei due casi possibili.

#### Risoluzione.

Determiniamo il valore della put. I possibili valori a scadenza dell'azione saranno (nell'ambito del modello binomiale uniperiodale):

$$A_T = \begin{cases} A_u = A_0 \cdot u = 6 \\ A_d = A_0 \cdot d = 4 \end{cases}$$

di conseguenza, i possibili pay-off varranno:

$$\begin{cases} P_u = \text{Max}(K - A_u; 0) = 0 \\ P_d = \text{Max}(K - A_d; 0) = 0,75 \end{cases}$$

La probabilità risk neutral vale

$$\pi = \frac{1 + i - d}{u - d} = \frac{1,05 - 0,8}{0,4} = 0,625$$

Il valore della put con sottostante A vale perciò:

$$P = \frac{\pi \cdot P_u + (1 - \pi) \cdot P_d}{(1 + i)} = 0,2679$$

Il valore del portafoglio in  $t = 0$  è:

$$\tilde{V}_0 = 20 \cdot (A + P) + 101,4 = 206,76$$

mentre il suo valore in  $t = 0$  al netto delle put è:

$$V_0 = 20 \cdot A + 101,4 = 201,4$$

Il valore del portafoglio in  $t = 1$  è:

$$V_1 = 20 \cdot A_T + 20 \cdot \text{Max}(K - A_T; 0) + 106$$

perciò i due casi possibili sono:

$$V_1(u) = 20 \cdot 6 + 20 \cdot 0 + 106 = 226$$

$$V_1(d) = 20 \cdot 4 + 20 \cdot 0,75 + 106 = 201$$

Infine i rendimenti netti nei due casi valgono:

$$R(u) = \frac{V_1(u)}{V_0} - 1 = 12,21\%$$

$$R(d) = \frac{V_1(d)}{V_0} - 1 = -0,20\%$$

5) Un investitore possiede un portafoglio formato da 10 obbligazioni *A* che hanno duration pari a 4 e 20 obbligazioni *B* che hanno duration 6. Il prezzo di entrambe è alla pari ed il tasso di mercato è il 4%.

Calcolare il valore del portafoglio a seguito di una variazione del tasso di un punto percentuale.

#### Risoluzione.

Il valore iniziale del portafoglio è  $V_i = 10 \cdot 100 + 20 \cdot 100 = 3.000$ .

Una variazione del tasso di un punto percentuale produce la seguente variazione per i titoli *A* e *B*:

$$\Delta V(A) = -\frac{D}{1+i} \cdot V_0 \cdot \Delta i = -\frac{4}{1,04} \cdot 100 \cdot (+0,01) = -3,8462$$

$$\Delta V(B) = -\frac{D}{1+i} \cdot V_0 \cdot \Delta i = -\frac{6}{1,04} \cdot 100 \cdot (+0,01) = -5,7692$$

La variazione di valore del portafoglio sarà:

$$\Delta V(P) = 10 \cdot \Delta V(A) + 20 \cdot \Delta V(B) = -153,8462.$$

Infine, il valore finale del portafoglio è:

$$V_f = V_i + \Delta V(P) = 3.000 - 153,8462 = 2.846,1538.$$